

§4.3 第3课时 空间中的距离问题

【学习目标】

- 1.能用向量方法解决点到直线、点到平面、相互平行的直线、相互平行的平面间的距离问题.
- 2.通过空间中距离问题的求解，体会向量方法在研究几何问题中的作用.

【重点难点】

重点：用向量方法解决点到直线、点到平面、相互平行的直线、相互平行的平面间距离问题.

难点：过空间中距离问题的求解，体会向量方法在研究几何问题中的作用.

【导学流程】

一、情境导入

在生活中可以看到很多道路上都有限高杆，主要的作用就是为了防止过高的车辆通过，以保障车辆和路上的设备设施的安全.比如限高路段内有不能移动的重要电缆、管道，或者涵洞，或者附近有高速路桥、铁路桥等.如图所示，限高3.1 m.同学们，你知道3.1 m指的哪段距离，数学中的距离是如何定义的呢？



二、探究新知

◇探究一 点到平面的距离

问题 设点 P 是平面 α 外一点，点 A 是平面 α 内的已知点， \mathbf{n}_0 是平面 α 的单位法向量，如何求平面 α 外一点 P 到平面 α 的距离？

【知识梳理】

点 P 到平面 α 的距离，等于点 P 与平面 α 内任意一点 A 连线所得向量 \overrightarrow{PA} ，在平面 α 的单位法向量 \mathbf{n}_0 方向上所作投影向量的长度，即 $d = |\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}_0|$.

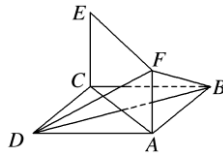
注意点：

(1)若 \mathbf{n} 是平面 α 的法向量，点 P 到平面 α 的距离就是 \overrightarrow{AP} 在平面的法向量上的投影向量 $\overrightarrow{PP'}$

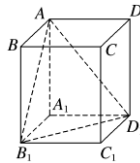
的长度. 即 $d = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$.

(2)如果两个平面 α, β 互相平行，在其中一个平面 α 内任取一点 P ，可将两个平行平面的距离转化为点 P 到平面 β 的距离求解.

例1 如图所示，已知菱形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直， $AB=AF=2$ ， $\angle ADC=60^\circ$.求点 A 到平面 FBD 的距离.



跟踪训练 1 如图所示，已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱．若点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{4}{3}$ ，求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高．

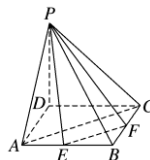


◇探究二 直线到平面的距离

例 2 已知边长为 4 的正三角形 ABC ， E ， F 分别为 BC 和 AC 的中点， $PA=2$ ，且 $PA \perp$ 平面 ABC ， Q 是 CE 的中点．

- (1)求证： $AE \parallel$ 平面 PFQ ；
- (2)求 AE 与平面 PFQ 的距离．

跟踪训练 2 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PD=1$ ， E ， F 分别为 AB ， BC 的中点．求直线 AC 到平面 PEF 的距离．



◇探究三 点到直线的距离

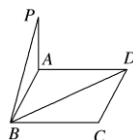
【知识梳理】

若点 P 是直线 l 外一点， \mathbf{l}_0 是直线 l 的单位方向向量，点 A 是直线 l 上任意一点，则点 P 到直线 l 的距离 $d = \sqrt{|\vec{PA}|^2 - |\vec{PA} \cdot \mathbf{l}_0|^2}$ ．

注意点：平行线间的距离可转化为点到直线的距离．

例 3 在长方体 $OABC-O_1A_1B_1C_1$ 中， $OA=2$ ， $AB=3$ ， $AA_1=2$ ，求 O_1 到直线 AC 的距离．

跟踪训练 3 如图， P 为矩形 $ABCD$ 所在平面外一点， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，若已知 $AB=3$ ， $AD=4$ ， $PA=1$ ，求点 P 到 BD 的距离．



三、随堂演练

1. 已知 $A(0,0,2)$, $B(1,0,2)$, $C(0,2,0)$, 则点 A 到直线 BC 的距离为()
 A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$
2. 若三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两垂直, 且满足 $PA=PB=PC=1$, 则点 P 到平面 ABC 的距离是()
 A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
3. 已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 则平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 之间的距离为()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 已知直线 l 经过点 $A(2,3,1)$, 且向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$ 所在直线与 l 垂直, 则点 $P(4,3,2)$ 到 l 的距离为_____.

四、课堂小结

1. 知识清单:

(1)点到平面的距离与直线到平面的距离. (2)点到直线的距离.

2. 方法归纳: 数形结合、转化法.

3. 常见误区: 对距离公式理解不到位, 在使用时生硬套用. 对公式推导过程的理解是应用的基础.

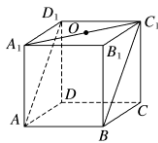
五、布置作业 (课时对点练)

基础巩固

1. 已知平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,-2,1)$, 点 $A(-1,3,0)$ 在 α 内, 则 $P(-2,1,4)$ 到 α 的距离为()
 A. 10 B. 3 C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{10}{3}$
2. 已知直线 l 过定点 $A(2,3,1)$, 且方向向量为 $\boldsymbol{s}=(0,1,1)$, 则点 $P(4,3,2)$ 到 l 的距离为()
 A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\sqrt{2}$
3. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=a$, $AA_1=2a$, 则点 D_1 到直线 AC 的距离为()
 A. $\sqrt{3}a$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$
4. 已知三棱锥 $O-ABC$ 中, $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$, 且 $OA=1$, $OB=2$, $OC=2$, 则点 A 到直线 BC 的距离为()

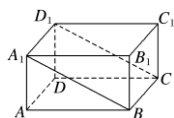
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. 3

5. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, O 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 则 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为()



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

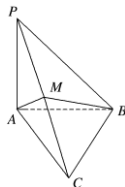
6. 如图, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A=5$, $AB=12$, 则直线 B_1C_1 到平面 A_1BCD_1 的距离是()



A. 5 B. 8 C. $\frac{60}{13}$ D. $\frac{13}{3}$

7. $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边 $BC=3$, $AC=4$, $PC \perp$ 平面 ABC , $PC=\frac{9}{5}$, 则点 P 到斜边 AB 的距离是_____.

8. 在我国古代数学名著《九章算术》中, 将四个面都为直角三角形的三棱锥称为鳖臑(bie nao), 如图. 已知在鳖臑 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA=AB=BC=2$, M 为 PC 的中点, 则点 P 到平面 MAB 的距离为_____.



9. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD=2AB=4$, 且 PD 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45° . 求点 B 到直线 PD 的距离.

10. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AC=AA_1=2$, $\angle BAC=90^\circ$, M 为 BB_1 的中点, N 为 BC 的中点.

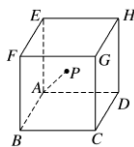
(1) 求点 M 到直线 AC_1 的距离;

(2) 求点 N 到平面 MA_1C_1 的距离.

综合运用

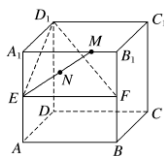
11. 如图, $ABCD-EFGH$ 是棱长为 1 的正方体, 若 P 在正方体内部且满足 $\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$

$+\frac{2}{3}\vec{AE}$, 则 P 到 AB 的距离为()



- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{3}{5}$

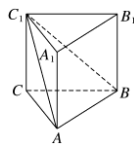
12. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 AA_1, BB_1 的中点, M 为棱 A_1B_1 上的一点, 且 $A_1M=\lambda(0<\lambda<2)$, 设点 N 为 ME 的中点, 则点 N 到平面 D_1EF 的距离为()



- A. $\sqrt{3}\lambda$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}\lambda$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

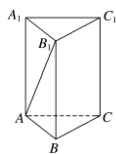
13. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是线段 BB_1, B_1C_1 的中点, 则直线 MN 到平面 ACD_1 的距离为_____.

14. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 所有棱长均为 1, 且 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , 则点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为_____.



拓广探究

15. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 $BB_1=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$, 则点 C 到直线 AB_1 的距离为_____.



16. 如图所示, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB=90^\circ$, $CA=2$, 侧棱 $AA_1=2$, D 是 CC_1 的中点, 则在线段 A_1B 上是否存在一点 E (异于 A_1, B 两点), 使得点 A_1 到平面 AED 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

